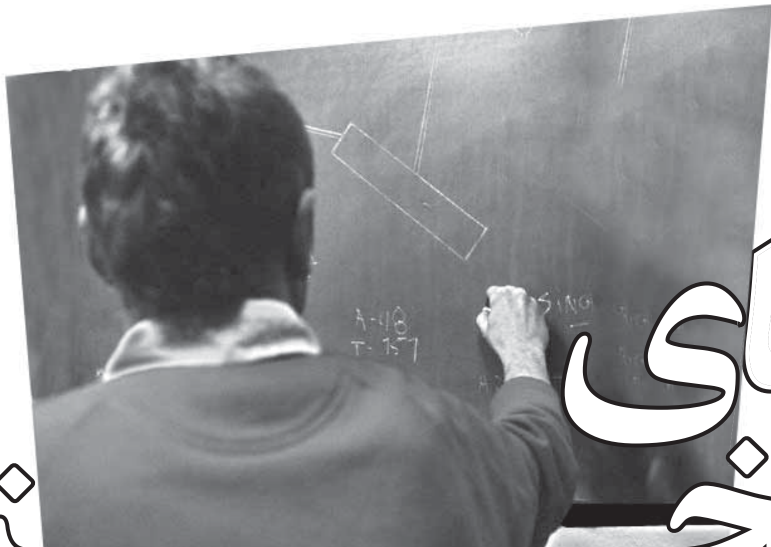
محرم نژاد ایردموسی*



پای تخته

مقدمه

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در فصل‌نامهٔ برهان است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، تعدادی مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان مجله را به چالش می‌طلبد. همچنین، از خوانندگان مجله دعوت می‌کنیم که مسائل خود را برای انعکاس در مجله برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل خود را همراه با حل آن‌ها بفرستید.

شما می‌توانید مسائل و راه‌حل‌های خود را از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل‌نامه درج و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا خواهد شد.

همچنین می‌توانید با مراجعه به وبلاگ مجله که نشانی آن در صفحه فهرست مجله موجود است به مسائل شماره‌های آینده دسترسی پیدا کنید.

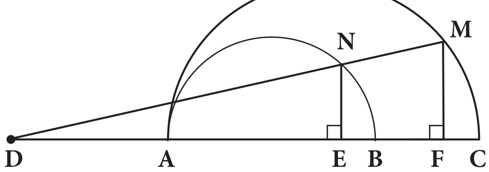
بخش اول: مسئله‌ها

۱۱۱. دو نیم‌دایره به قطرهای AB و AC در نقطهٔ A مماس درونی‌اند. پاره‌خط‌های مساوی BE و CF را روی AC جدا می‌سازیم و عمودهای EN و FM را در این نقاط بر AC اخراج می‌کنیم تا نیم‌دایره‌ها را در N و M قطع کنند. اگر امتدادهای AC و MN یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند، ثابت کنید:

الف) $AD^2=AE.AF$

ب) $NE.MF=AD.BE$

(طراح مسئله: هوشنگ شرقی، دبیر ریاضی و عضو هیئت تحریریه)



شکل ۱

۱۱۲. یک مربع را داخل یک مربع دیگر انداخته‌ایم. ثابت کنید اگر رئوس متناظر این دو مربع را به‌هم وصل کنیم، از چهار ناحیهٔ حاصل، مجموع مساحت‌های دو ناحیه با مجموع مساحت‌های دو ناحیهٔ دیگر برابر است (طراح مسئله: نفیسه آغویی، دانش‌آموز مرکز فرزانگان چهاردانگه).

۱۱۳. چهار نفر ماهی‌گیر روی هم ۱۱ ماهی صید کردند، به‌طوری که هر کدام حداقل یک ماهی صید کردند. درستی جملات زیر را بررسی کنید:

۱. ماهی‌گیری وجود دارد که دقیقاً ۲ ماهی صید کرده است.

۲. ماهی‌گیری وجود دارد که دقیقاً ۳ ماهی صید کرده است.

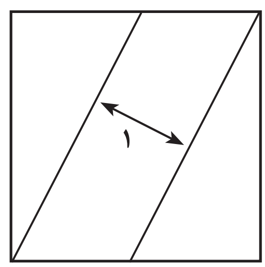
۳. حداقل یک ماهی‌گیر هست که کمتر از ۳ ماهی صید کرده است.

۴. حداقل یک ماهی‌گیر هست که بیشتر از ۳

ماهی صید کرده است.
۵. حداقل ۲ ماهی‌گیر هستند که بیشتر از ۱ ماهی صید کرده‌اند.

۱۱۴. در یک چایخانه سنتی چهار نوع کیک تهیه می‌شود. پنج نفر از دوستانم دیروز به آنجا رفتند و هر کدام دو کیک متفاوت برای خود سفارش دادند. مبالغی که آن‌ها پرداخت کردند عبارت بود از: ۶، ۹، ۱۱، ۱۲ و ۱۵ هزار تومان. امروز من به آنجا خواهم رفت و از هر نوع کیک یک عدد سفارش خواهم داد. چه‌قدر باید بپردازم؟

۱۱۵. مطابق شکل مربعی را با کشیدن دو خط موازی که فاصله‌شان یک متر است، به سه ناحیه با مساحت یکسان تقسیم کرده‌ایم. مساحت مربع را بیابید.



شکل ۲

۱۱۶. عمل $\circledast$ روی اعداد صحیح به‌گونه‌ای تعریف شده است که خاصیت جابه‌جایی و شرکت‌پذیری دارد. همچنین، می‌دانیم برای هر $a\in Z$، $a\circledast 0=a$ و برای هر دو عدد صحیح a و b داریم:
$a\circledast(b+1)=(a\circledast b)+(1-a)$.
الف) برای هر $a\in Z$ ثابت کنید: $a\circledast 1=1$.
ب) حاصل $(-3)\circledast(-4)$ چه عددی است؟
ج) برای هر $a\in Z$ ثابت کنید: $4\circledast a=4-3a$.
د) برای هر $a\in Z$ و هر $b\in N$ ثابت کنید:
$a\circledast b=a+b-ab$.

۱۱۷. تصاعدی حسابی با چهار جمله پیدا کنید که همهٔ جملاتش عدد اول باشند و بین تمام چنین تصاعدهایی کمترین مجموع جملات را داشته باشد.

۱۱۸. آقای **نوبخت** ۴ فرزند دارد که یکی از آن‌ها (علی)، سنی بین ۱۳ تا ۱۹ سال دارد و حاصل‌ضرب سن فرزندانش ۱۸۴۸ است. سن علی را پیدا کنید.

۱۱۹. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که ثلث و سه برابرش هم صحیح است؟

۱۲۰. هواپیمایی با سرعت ثابت ۸۱۰ کیلومتر بر ساعت از شهر x به شهر y می‌رود و این مسیر را ظرف ۴ ساعت طی می‌کند؛ اما هنگام بازگشت، این مسیر را در ۵ ساعت طی می‌کند. اگر سرعت باد از سمت x به y را ثابت فرض کنیم، سرعت باد را به‌دست آورید.

بخش دوم: راه‌حل‌ها

* راه‌حل مسائل ۵۱ تا ۵۶ از آقای **محمد طبیعی**، دانش‌آموز دبیرستان علامه طباطبایی (واحد کارگر) و راه‌حل مسائل ۵۷ تا ۶۰ از آقای **مهدی قربانی**، دبیر ریاضی منطقهٔ ۹ تهران است.

۵۱. برای هر چهار ضلعی با طول اضلاع a، b، c و d و مساحت S ثابت کنید:
$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq 4S$$

نامساوی برای کدام چهارضلعی‌ها به تساوی تبدیل خواهد شد؟

می‌دانیم: $S(ABC)=\frac{1}{2}ab\sin\angle ABC$ و $S(ADC)=\frac{1}{2}cd\sin\angle ADC$. در نتیجه:
$$S(ABCD)=\frac{1}{2}(ab\sin\angle ABC+cd\sin\angle ADC)$$
چون: $\sin\alpha\leq 1$، پس: $S(ABCD)\leq\frac{ab+cd}{2}$.
همچنین، می‌دانیم: $a^2+b^2\geq 2ab$ و $c^2+d^2\geq 2cd$. در نتیجه: $S(ABCD)\leq\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)$. با توجه به نامساوی‌هایی که استفاده کردیم. تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $a=b$، $c=d$ و دو زاویهٔ B و D، قائمه هستند. در نتیجه چهارضلعی باید مربع باشد.

۵۲. عدد طبیعی M را جادویی می‌نامیم، هرگاه حاصل‌ضرب ارقام آن با مجموع ارقام آن برابر باشد.

الف) ثابت کنید برای هر $n=1,2,\dots,10$، عددی n رقمی و جادویی وجود دارد.

ب) ثابت کنید بی‌شمار عدد طبیعی جادویی وجود دارد.

الف) اعداد زیر جواب قسمت (الف) هستند:

۱ ,۲۲, ۳۳۳, ۴۴۴۴, ... ,۹۹۹۹۹۹۹۹۹, ۴۴۱۱۱۱۱۱۱۱

ب) ثابت می‌کنیم، از روی هر عدد جادویی مانند x، می‌توان عددی جادویی و بزرگ‌تر از x ساخت. فرض کنید: $X=\overline{y_1y_2...y_n}$. عدد $M=\overline{y_1y_2...y_n111...12}$ را که در آن تعداد رقم‌های ۱ برابر است با: $y_1+y_2+...+y_n-2$، در نظر بگیرید. مجموع ارقام M برابر است با: $2(y_1+y_2+...+y_n)$ و حاصل‌ضرب ارقام M نیز برابر است با: $2y_1y_2...y_n$. چون x جادویی است، پس M نیز جادویی خواهد شد.

۵۳. مستطیلی با طول و عرض m و n به مربعات واحد افراز شده است و $m,n\in N$، به‌طوری که مجموع مساحت مربعات واحدی که مجاور اضلاع مستطیل هستند، برابر است با نصف مساحت مستطیل. مقادیر طبیعی m و n را بیابید.

باید داشته باشیم: $\frac{mn}{2}=2m+2n-4$. در نتیجه: $(m-4)(n-4)=8$. با فرض $m\ge n$، داریم: $m-4=4$ و $n-4=2$ یا $m-4=8$ و $n-4=1$. پس برای m و n چهار دسته جواب داریم: (۶,۸)، (۸,۶)، (۵,۱۲) و (۱۲,۵).

۵۴. فرض کنید x، y و z اندازه‌های زوایای یک مثلث برحسب درجه باشند. ثابت کنید:

الف) اگر $\frac{x}{y}$، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ اعدادی گویا باشند، آن‌گاه x، y و z نیز گویا هستند.

ب) اگر تنها یکی از اعداد $\frac{x}{y}$، $\frac{y}{z}$ و $\frac{z}{x}$ گویا باشد، آن‌گاه x، y و z گنگ هستند.

الف) از تساوی $x+y+z=180^\circ$ داریم: $y(\frac{x}{y}+1+\frac{z}{y})=180^\circ$. چون $\frac{x}{y}$ و $\frac{z}{y}$ گویا هستند، پس $\frac{x}{y}+1+\frac{z}{y}$ نیز گویا و در نتیجه y نیز گویاست. به طریق مشابه، گویا بودن x و z را هم می‌توان ثابت کرد.

ب) فرض کنید $\frac{x}{y}$ گویا باشد. حال از برهان خلف، مسئله را اثبات می‌کنیم:

۱. اگر z گویا باشد، آن‌گاه $y+x=180-z$ نیز گویا خواهد بود. در نتیجه از گویا بودن $\frac{x}{y}$، گویا بودن $\frac{x}{x+y}$ را نتیجه می‌گیریم. و چون: $x+y\in Q$، پس: $x\in Q$. بنابراین $y\in Q$ است که تناقض دارد.

۲. اگر $x\in Q$، آن‌گاه چون: $y=\frac{y}{x}\times x$، پس: $y\in Q$. و چون $x+y\in Q$، در نتیجه $z=180-x-y\in Q$ که باز هم به تناقض می‌رسیم.

۳. اگر $y\in Q$، به‌طور مشابه ثابت می‌شود x و z هم گویا هستند که تناقض است. در نتیجه هیچ‌کدام از اعداد x، y و z گویا نیستند.

۵۵. در یک مدرسه ۱۰ کلاس وجود دارد. هر دانش‌آموز از یک کلاس دقیقاً با یک دانش‌آموز از هر یک از ۹ کلاس دیگر آشناست. ثابت کنید تعداد دانش‌آموزان کلاس‌ها یکسان است.

فرض کنید کلاس C_1 کم‌ترین تعداد دانش‌آموز را داشته باشد. تعداد زوج‌های آشنایی را می‌شماریم که یکی از آن‌ها در کلاس C_1 و دیگری خارج از کلاس C_1 باشد. چون هر عضو C_1 با ۹ نفر از دیگر کلاس‌ها آشناست، پس تعداد زوج‌های مذکور برابر است با: $9n_1$ که در آن، n_1 تعداد دانش‌آموزان C_1 است. از طرف دیگر، هر دانش‌آموز از کلاس‌های C_2 تا C_{10}، دقیقاً با یک دانش‌آموز از کلاس C_1 آشناست. پس مجموع تعداد دانش‌آموزان C_2 تا C_{10} برابر است با $9n_1$. اگر n_i نشان‌دهندهٔ تعداد دانش‌آموزان کلاس C_i باشد، داریم: $9n_1=n_2+n_3+...+n_{10}$ و $n_1\le n_j$ $(2\le j\le 10)$. در نتیجه باید: $n_1=n_2=...=n_{10}$.

۵۶. مستطیل L را می‌توان به ۲۰۰ مربع یکسان افراز کرد. همچنین می‌توان L را به ۲۸۸ مربع یکسان افراز کرد. ثابت کنید L را می‌توان به ۳۹۲ مربع یکسان افراز کرد.

فرض کنید ۲۰۰ مربع در k ستون ´kتایی مستطیل را افراز کرده باشند و ۲۸۸ مربع در s ستون ´sتایی. در نتیجه $kk'=200$، $ss'=288$. حال اگر قرار باشد

مســتطیل با ۳۹۲ مربع به ضلع T پوشانده شود، باید: $۳۹۲T^۲=۲۰۰x^۲$ و در نتیجه: $T=\frac{۵}{۷}x$ که در آن، x ضلع مربعی است که با ۲۰۰ تا از آن‌ها مستطیل را پوشانده‌ایم. شرط لازم و کافی برای پوشاندن مستطیل با مربع‌هایی به ضلع T آن اســت که طول و عرض مستطیل مضرب T باشــند. در نتیجه اگر m و n طول و عرض مستطیل باشند، باید: $\frac{m}{T}=\frac{۷m}{۵x}=\frac{۷}{۵}k$ و $\frac{n}{T}=\frac{۷n}{۵x}=\frac{۷}{۵}k'$. پس کافی اســت ثابت کنیم k و k´ مضرب ۵ هستند. چون $kk'=۲۰۰$، دو حالت پیش می‌آید.

حالت اول: k و k´ هر دو مضرب ۵ هســتند که در این حالت حکم برقرار می‌شود.

حالــت دوم: فقط یکی از دو عدد k و k´ مضرب ۵ هستند (مثلاً k). در این حالت k مضرب ۲۵ است و k´ عامل ۵ را ندارد. در نتیجه چون: $\frac{k}{k'}=\frac{s}{s'}$، پس $\frac{k}{k'}s^۲=ss'=۲۸۸$ و یا $۲۸۸k'=ks^۲$. اما طرف اول این تساوی عامل پنج را ندارد، در صورتی‌که طرف دوم تساوی مضرب ۲۵ است (تناقض). بنابراین تنها حالت اول اتفاق می‌افتد.

۵۷. ثابــت کنیــد مجموع هر ســه عــدد طبیعی متوالی، عددی اســت که مجموع مکعبات آن سه عدد را می‌شمارد.

اگر سه عدد متوالی n-۱، n و n+۱ را در نظر بگیریم، مجموع آن‌ها برابر ۳n است و:

$$(n-۱)^۳+n^۳+(n+۱)^۳=۳n^۳+۶n=۳n(n^۲+۱)$$

در نتیجه مجموع مکعبات سه عدد بر مجموع آن‌ها بخش‌پذیر است.

۵۸. x و y دو عدد حقیقی هســتند، به‌طوری که: $(x+۵)^۲+(y-۱۲)^۲=۱۴^۲$. کمتریــن مقــدار $x^۲+y^۲$ را بیابید.

معادلــهٔ $(x+۵)^۲+(y-۱۲)^۲=۱۴^۲$، معادلــهٔ دایره‌ای است به مرکز (۵,۱۲-) و به شعاع ۱۴. با فرض $x^۲+y^۲=r^۲$، نقطــهٔ (x,y) روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شــعاع r قرار دارد. پس (x,y) روی نقاط مشــترک دو دایره است. در نتیجه کمترین مقدار r زمانی است که دو دایره مماس داخل باشند. در این حالت نقطهٔ تماس T، مبدأ و نقطهٔ $A(-۵,۱۲)$ در یک امتداد هستند و داریم: $AT=OA+r$. در نتیجــه: $r=۱۴-\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}=۱۴-۱۳=۱$. پس کمترین مقدار $x^۲+y^۲$ برابر یک است.

۵۹. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$S=\frac{۱}{۱!۱۳۹۱!}+\frac{۱}{۳!۱۳۸۹!}+\ldots+\frac{۱}{۱۳۹۱!۱!}$$

دو طرف تساوی را در !۱۳۹۲ ضرب می‌کنیم:

$$۱۳۹۲!S=\binom{۱۳۹۲}{۱}+\binom{۱۳۹۲}{۳}+\ldots+\binom{۱۳۹۲}{۱۳۹۱}=۲^{۱۳۹۲-۱}=۲^{۱۳۹۱}$$

در نتیجه: $S=\frac{۲^{۱۳۹۱}}{۱۳۹۲!}$.

اتحاد زیر (که در حل مسئله از آن استفاده شد) از اتحاد دوجمله‌ای خیام ـ پاسکال نتیجه می‌شود:

$$\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+\ldots=۲^{n-۱}$$

۶۰. k و n دو عدد طبیعی هستند. ثابت کنید:

$$۱\times۲\times\ldots\times k+۲\times۳\times\ldots\times(k+۱)+\ldots+n(n+۱)(n+۲)\ldots(n+k-۱)=\frac{n(n+۱)\ldots(n+k)}{k+۱}$$

طرف اول حکم را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{k!}{۰!}+\frac{(k+۱)!}{۱!}+\ldots+\frac{(k+n-۱)!}{(n-۱)!}=k!\left(\binom{k}{۰}+\binom{k+۱}{۱}+\ldots+\binom{k+n-۱}{n-۱}\right)$$

اما از طرف دیگر، برای هر $k, r\in N$ داریم:

$$\binom{k}{۰}+\binom{k+۱}{۱}+\ldots+\binom{k+r}{r}=\binom{k+r+۱}{r}$$

در نتیجه عبارت داده شده برابر است با:

$$k!\binom{k+n}{n-۱}=\frac{k!(k+n)!}{(n-۱)!(k+۱)!}=\frac{n(n+۱)\ldots(n+k)}{k+۱}$$

* iradmusa@yahoo.com